

УДК 521.1

Развитие хаотической адвекции¹

Хассан Ареф

Факультет теоретической и прикладной механики
Университет Иллинойса в Урбана-Чампейн
Урбана, IL 61801, США
E-mail: haref@vt.edu

Данная концепция была разработана около двадцати лет назад в продолжение работы по адвекции, обусловленной взаимодействием точечных вихрей. Термин «хаотическая адвекция» впервые появился в 1982 году в заголовке аннотации к тридцать пятому ежегодному заседанию Отделения Динамики Жидкости (DFD), Американского Физического Общества (APS). Быть может, истинным «днем рождения» этого термина следует считать 1984 год, когда в *Journal of Fluid Mechanics* была опубликована статья, ставшая основным источником для данной. Более ранняя, датируемая 1960-ми годами работа Арнольда и Хенона по адвекции, создаваемой стационарными трехмерными потоками, уже содержала родственные идеи и результаты, однако не получила должной оценки. В данной статье, основанной на Лекции памяти Отто Лапорта, которая была прочитана на пятьдесят третьем ежегодном заседании ASP/DFD 2000 года, автор останавливается на этих и других предшественниках, а также развитии хаотической адвекции на протяжении двух последних десятилетий. Особое внимание уделяется некоторым волнующим последним достижениям, как-то: приложение к смешиванию жидкостей в микро-электромеханических системах (MEMS) и к обработке материалов, а также введение топологических методов анализа. Сейчас хаотическая адвекция считается подразделом гидромеханики с множественными ответвлениями и многообещающими перспективами в теории, эксперименте и практике.

Ключевые слова: Отто Лапорт, хаотическая адвекция, размешивание, перемешивание, мешалка.

H. Aref

The development of chaotic advection

Keywords: Otto Laporte, chaotic advection, stirring, mixing, agitator.

Mathematical Subject Classifications: 76-02

¹Перевод манускрипта, представленного для публикации в журнале *Physics of Fluids*. H. Aref. *The development of chaotic advection* // *Physics of Fluids*, 2002, V.14, p. 1315–1325. Публикуется с разрешения редакции и автора. Пер. с англ. Н.Зубченко. Статья из сборника «Некоторые задачи хаотической адвекции» (под ред. В.В. Мелешко, М.А. Соколовского), готовящегося к изданию Институтом компьютерных исследований. Более полная информация об издании представлена на с.***-***.

1. Вводные замечания

Прежде всего, мне хотелось бы поблагодарить Комитет за врученную мне Премию им. Отто Лапорта за 2000 год. Мне также хотелось бы поблагодарить и тех, кто предложил мою кандидатуру на получение этой премии. И, наконец, я хочу выразить благодарность моим коллегам и давним студентам, благодаря которым эта номинация стала возможна. Большое спасибо всем вам. Я очень ценю то, что вы выбрали меня.

Заключительное высказывание номинации гласит: «...и особенно за развитие концепции хаотической адвекции». Итак, несмотря на то, что это развитие имело место около двадцати лет назад, я счел самой подходящей темой для моей сегодняшней лекции именно развитие хаотической адвекции.

Я также счел уместным упомянуть в своей лекции работу Отто Лапорта. Отто Лапорт был членом небольшой группы блестящих молодых физиков-теоретиков, обучавшихся в середине 1920-х годов у Арнольда Зоммерфельда в Мюнхене. Лапорт, родившийся в Майнце (Германия) 23 июля 1902 года, начал проводить эксперименты с оптикой и электромагнетизмом уже в начальной школе. Первые университетские курсы он слушал во Франкфурте, где одним из его преподавателей был Макс Борн. Борн в разговоре с Зоммерфельдом дал Лапорту самые лестные рекомендации. В группе, собравшейся вокруг Зоммерфельда, Лапорт познакомился и поработал с Вернером Гейзенбергом, Грегором Вентцелем, Карлом Херцфельдом и Полем Эвальдом. Встречался он и с ассистентом Зоммерфельда, Вольфгангом Паули.

Ученики Зоммерфельда получили разносторонние знания как в классической, так и в современной физике. Им была знакома гидромеханика и электромагнитная теория, и они, конечно, втянулись в только появляющуюся область квантовой механики. Первая статья Лапорта по дифракции электромагнитных волн на сфере была опубликована незадолго до того, как ему исполнился 21 год. Она и стала его диссертацией на получение степени доктора философии.

Вскоре после этого он начал работать в области спектроскопии. Изучая спектры ванадия и железа, Лапорт сформулировал правило отбора, которое теперь носит его имя [24] и которое предшествовало закону сохранения четности, открытому позднее.

В 1924 году Отто Лапорт приехал в США, где одним из первых получил стипендию Рокфеллера. В 1926 году он начал преподавать в Мичиганском университете, где Харрисон Рэндлл вскоре собрал несколько блестящих физиков, включая Джорджа Уленбека и Сэмюэля Гаудсмита.

В 1944 году Лапорт, в сущности, заново начал карьеру в гидромеханике. В его первой статье приводилась формула расчета подъемной силы аэродинамической поверхности, имеющей форму эллипса. Два года спустя он начал экспериментальные исследования с ударной трубкой.

Лапорт был одним из основателей Отделения Динамики Жидкости ASP, а в 1965 году — председателем этого Отделения.

Лапорт умер из-за быстро прогрессирующего рака 28 марта 1971 года. Он умер после того, как его решили представить к избранию в Национальную Академию наук на ее ежегодном заседании в апреле того же года. Академия избрала Отто Лапорта своим членом уже после его смерти, что случилось впервые за всю историю ее существования. (Дополнительную информацию по биографии Отто Лапорта см. в его некрологе, написанном для Национальной Академии наук [16].)

После смерти Лапорта его друзья учредили ежегодную Лекцию памяти Отто Лапорта, которую первым прочитал Ричард Фаулер в 1972 году. В 1985 году эту традицию подхватило Американское Физическое Общество, превратив ее в одну из своих ежегодных премий.

Основная суть моей лекции памяти Отто Лапорта такова. Сначала я дам определение ха-

отической адвекции. Затем обозначу работы, которые можно рассматривать как предшествующие этой концепции, работы, содержавшие важные аспекты рассматриваемой концепции, но не вобравшие ее целиком или не «справившиеся» с сообществом гидромехаников того времени. В-третьих, я вкратце расскажу, каким образом понятие хаотической адвекции было введено в начале 1980-х гг. И, наконец, я обозначу некоторые области применения и текущих исследований, которые представляются мне наиболее многообещающими в будущем.

2. Хаотическая адвекция

Когда частица движется с жидкостью, мы говорим об адвекции, иногда о *пассивной* адвекции, чтобы подчеркнуть, что частица настолько легка и инертна, что не может не увлекаться жидкостью, мгновенно перенимая скорость окружающего ее потока. Мы можем записать

$$V_{\text{частицы}} = V_{\text{жидкости}}, \quad (2.1)$$

и это будет формальным выражением адвекции. В частности, кинематика самой жидкости такова, что каждая частица жидкости подвергается пассивной адвекции.

Скорость частицы, $V_{\text{частицы}}$, конечно же, задается скоростью изменения ее положения:

$$V_{\text{частицы}} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (2.2)$$

где (x, y, z) — это координаты радиуса-вектора частицы, в данном случае, — в обычных декартовых координатах.

Скорость жидкости задается из других соображений, включающих решение некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных, например, уравнений Эйлера, уравнений Навье—Стокса или уравнений Стокса. Мы оставляем все это для других работ: нас интересует только то, что нам, некоторым образом, заданы составляющие скорости жидкости u , v и w как функции координат, а также времени, т. е. мы имеем

$$V_{\text{жидкости}} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)). \quad (2.3)$$

Тогда условие о том, что скорость частицы равна скорости жидкости, приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые я называю *уравнениями адвекции*:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad (2.4a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad (2.4b)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \quad (2.4c)$$

Эти уравнения встречаются во многих вводных текстах, например, на стр. 71 «Основ гидро- и аэромеханики» Прандтля и Титенса в главе, названной «Методы описания». В гидромеханике мы используем два «метода описания»: метод Лагранжа, когда прослеживаются отдельные частицы, и метод Эйлера, когда нас интересуют не частицы, а поля [28]. Ясно, что в случае с уравнениями адвекции используется описание движения жидкости по методу Лагранжа.

С точки зрения теории динамических систем, трех обыкновенных дифференциальных уравнений, типа системы (2.4), более чем достаточно для получения неинтегрируемой или хаотической динамики. Правым частям уравнений даже не нужно быть очень сложными. Так, в 1963 году Лоренц показал, что неинтегрируемыми могут быть три уравнения с простой квадратичной правой частью [26]. Но при этом следует отметить, что в своей модели тепловой конвекции Лоренц работал с тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями, потому что сократил до трех уравнений большую, в принципе бесконечную, систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При рассмотрении проблемы адвекции такого сокращения не происходит. Мы имеем три уравнения, т. к. работаем с движением в трехмерном пространстве. В этом смысле неинтегрируемое поведение является строгим свойством кинематики потока.

Возвращаясь к (2.4), мы видим, что в трехмерном пространстве поток может не зависеть от времени, но в то же время демонстрировать хаотическое поведение. Вполне подойдут стационарные потоки. В двумерном пространстве для получения хаотического движения частицы нужно, чтобы поток зависел от времени. Стационарная, двумерная адвекция поддается интегрированию.

Из всего вышесказанного есть важное исключение в виде двумерного несжимаемого потока, потому что в этом случае скорость является производной функции тока Ψ и выражается через известные формулы

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Если эти уравнения объединить с уравнениями адвекции, то они превратятся в нечто, уже знакомое нам из динамики, а именно: гамильтоновы канонические уравнения для системы с одной степенью свободы:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.6)$$

Функция тока играет роль гамильтониана! Координаты частицы x и y являются сопряженными переменными. Любую из них можно принять за обобщенную координату. Тогда вторая декартова координата будет сопряженным обобщенным импульсом. (Это предельный пример симметрии, существующей между обобщенными координатами и импульсами в гамильтоновой формулировке динамики). Фазовое пространство в этой задаче является конфигурационным.

Короче говоря, двумерная кинематика адвекции, вызванной несжимаемым потоком, эквивалентна гамильтоновой динамике системы с одной степенью свободы. Это не зависит от того, является жидкость вязкой или нет. И здесь нет ни противоречия, ни парадокса. Гамильтонова природа кинематики проистекает именно из несжимаемости. Это не зависит от того, является ли движение динамически диссипативным или нет.

Тот факт, что движение частицы в двумерном несжимаемом потоке можно рассматривать как гамильтонову динамическую систему с одной степенью свободы, на мой взгляд, был общеизвестен среди специалистов по гидромеханике на протяжении многих лет. Однако его, видимо, считали бесплодным, формальным наблюдением. Возможность возникновения хаоса в нестационарной гамильтоновой системе, имеющей одну степень свободы, была, несомненно, известна к середине 1960-х гг. Тем не менее, связь между этими двумя идеями не осознавалась до начала 1980-х гг., а следовательно, не было и речи о введении термина хаотическая адвекция. Я вкратце расскажу об этих достижениях по порядку. Однако сначала мне хотелось бы выделить некоторые ранние работы, содержавшие зачатки этой идеи.

3. Предшествующие работы

Первую статью, на которой мне хотелось бы остановиться, написал современник Лапорта, Карл Эккарт. Сегодня его имя ассоциируется с теоремой Вигнера—Эккарта в квантовой механике — сложным результатом из области симметрии и правилом отбора, которое, по-моему, включает в себя как частный случай и правило Лапорта. В 1948 году, занимаясь геофизической гидродинамикой (Эккарт работал директором Института океанографии Скриппса), он опубликовал статью в *Journal of Marine Research* [18]. В этой статье он создает прецедент для использования двух слов «размешивание» (stirring) и «перемешивание» (mixing) для обозначения двух различных физических процессов. Привожу цитату из его статьи: «... одна только адвекция, в конечном итоге, увеличит среднее значение любого начального градиента. . . , — писал Эккарт. — Этот эффект адвекции в данном случае равносителен размешиванию». И: «Действие проникновения или диффузии направлено на уменьшение среднего значения градиента. Этот процесс справедливо именуется перемешиванием. . . Обычно на ранних стадиях процесса доминируют адвективные процессы. . . Они могут настолько увеличить средний градиент, что, в конце концов, доминирующим станет перемешивание. . . Вязкость, в отсутствие противодействующих ей факторов, имеет тенденцию останавливать размешивание. . . еще до того, как произойдет ощутимое перемешивание». Я нахожу эти качественные идеи и терминологию очень точными и полезными и хочу поддержать предложение Эккарта использовать два этих слова для разграничения «механического» и «молекулярного» физических процессов, создающих перемешивание.

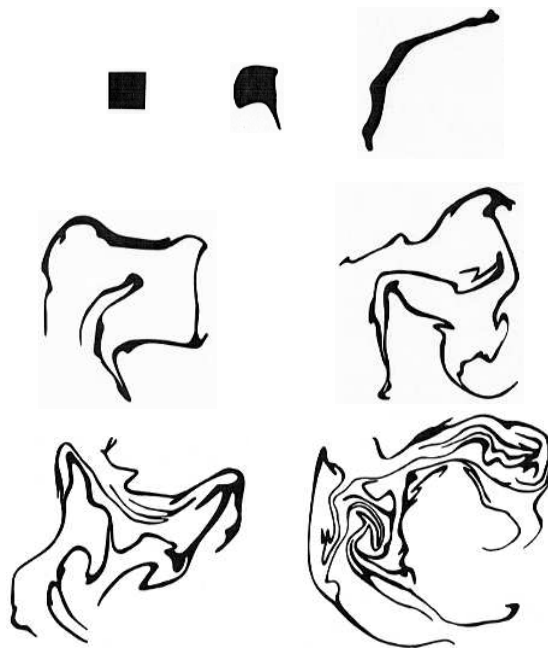


Рис. 1. Размешивание «капли» окрашенной жидкости двумерным нестационарным ламинарным потоком (Welander, 1955).

Вторым предшественником является статья Пьера Веландера, аспиранта шведского физика Оскара Клейна, с которым он работал над кинетической теорией. Как только Веландер получил докторскую степень, он сразу же поступил в институт Россби. Взяв емкость с немного

размешанной жидкостью, пребывающей, в сущности, в двумерном движении, Веландер добавил туда каплю медленно диффундирующей краски и наблюдал изменения ее пространственных очертаний. На его экспериментальных рисунках (рис. 1) видно, что капля сильно разветвляется, причем структура длинных ответвлений становится все более тонкой. Можно подумать, что эта капля попала в турбулентный поток, но поток таковым не был. Мгновенная картина линий тока в данном случае была представлена всего лишь системой вложенных овалов, масштаб которых определяется, грубо говоря, внешней границей сосуда.

Итак, вот парадокс. Каким образом поток некоторого мгновенного масштаба создает пятна в адвективном маркере, которые много меньше масштаба самого потока? Как эти странные завихрения и изгибы пятен появляются, в то время, как в линиях тока они не наблюдаются?

Тогда Веландер ничего не знал о хаосе (хотя десять лет спустя он стал одним из пионеров этой области), поэтому он попытался воспользоваться идеями равновесной статистической механики, в частности, «эргодической теоремой», согласно которой система будет занимать все большую и большую часть своего фазового пространства, в конечном итоге, заполняя его целиком. Это, некоторым образом, и служило причиной того, почему пятно адвекции распространилось так, словно пыталось покрыть всю область потока.

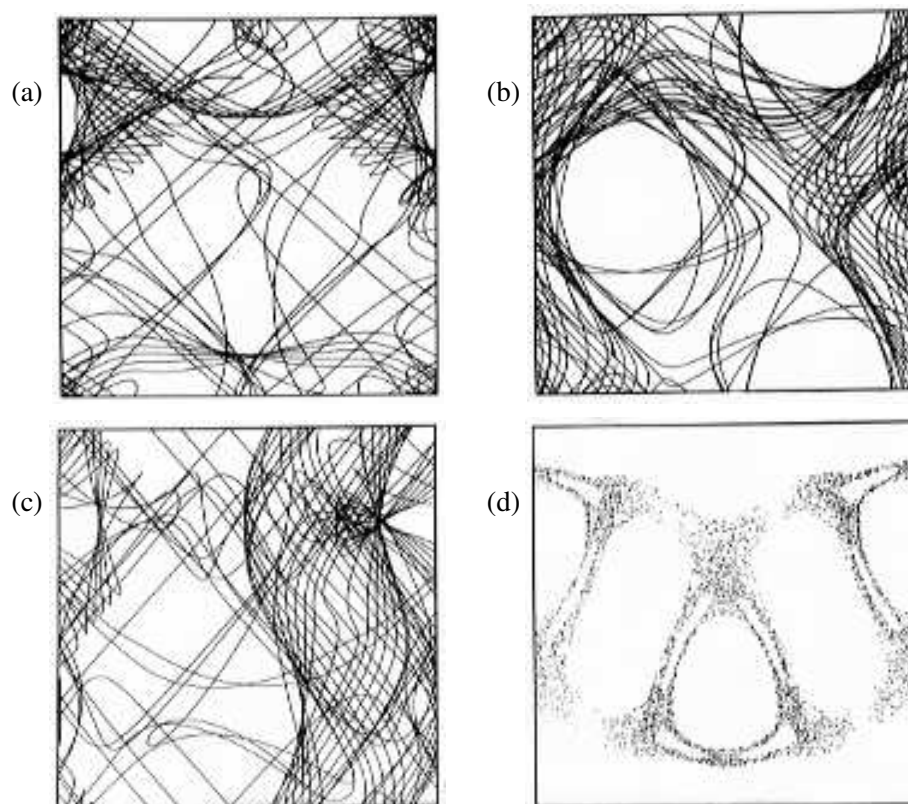


Рис. 2. (a)–(c) Траектории движения частицы, наблюдаемые с трех перпендикулярных направлений в так называемом потоке ABC, заданном $(u, v, w) = (\sin z + 0.65 \cos y, \sin x + \cos z, 0.65 \sin y + \cos x)$; (d) Пересечения траектории, показанной на (a)–(c), с плоскостью, параллельной одной из граней периодического куба. (Взято из: H. Aref, S. W. Jones, S. Mofina, I. Zawadzki. *Vortices, kinematics and chaos* («Вихри, кинематика и хаос»). *Physica D*, V. 37, p. 423–440 (1989, с разрешения Elsevier Science))

Третьим предшественником можно считать две взаимосвязанные статьи В. И. Арнольда и М. Хенона, написанные в середине 1960-х годов [8, 20]. Конечно, нет никаких сомнений в том, что эти пионеры теории динамических систем абсолютно точно поняли, в чем суть хаоса или интегрируемости уравнений адвекции.

Арнольд доказал [8], что в потоке Бельтрами, где векторы скорости и завихренности параллельны всегда, вектор Ламба, $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}$, векторное произведение скорости и завихренности, которое в стационарном, невязком потоке является градиентом интеграла Бернулли, будет везде равно нулю, а потому не будет ограничивать траектории движения частицы двумерными поверхностями. Следовательно, частицы будут блуждать по подмножеству объема всего потока, демонстрируя неинтегрируемость уравнений адвекции.

На рис. 2 это подтверждается тремя перпендикулярными проекциями частицы в так называемом потоке ABC. Если траекторию пересекает плоскость, проходящая через одну из граней куба, как на четвертом рисунке, точки пересечения заполняют участок плоскости, что свидетельствует о блуждании этой траектории в пространстве. Хенон вычислил такие поверхности сечения, замечательные для того времени, и подтвердил неинтегрируемость уравнений адвекции для этих частных потоков [20].

Почему эти исследования не «были восприняты» сообществом гидромехаников? Неужели все дело в кратком изложении на французском языке? Или в использовании несколько усложненных потоков? Я не знаю. Возможно, ученые подумали, что это явление справедливо исключительно для потоков Бельтрами. Но какой бы ни была причина, хаотической адвекции пришлось ждать еще почти двадцать лет.

В статье Берри и др. [12], опубликованной в 1979 году, авторы размышляют над формой кривой, подвергнутой действию общего двумерного отображения, сохраняющего площадь, как это происходит в случае с материальной кривой в периодическом двумерном несжимаемом потоке. Авторы выделяют «сигнатуры» эллиптических и гиперболических неподвижных точек, относящиеся к оборачивающему действию вблизи первых в виде «изгиба» и растяжению и сжатию в петле вблизи последних в виде «завитка». Затем они утверждают, что непрерывная кривая «эволюционирует в фантастическую форму, включающую как изгибы, так и завитки. . . Ее завитки напоминают сливки, расползающиеся в чашке с кофе, и свидетельствуют о том, что изучение общих, сохраняющих площадь отображений кривых на плоскости, или поверхностей в пространстве, может оказаться полезным для изучения турбулентного перемешивания». За исключением слова «турбулентного», которое не является обязательным в том смысле, что такое перемешивание происходит в ламинарных потоках, и, конечно, именно оно будет иметь место при хаотической адвекции материальной линии. И вновь это понимание на несколько лет опередило свое время и, судя по всему, не произвело никакого впечатления на сообщество гидромехаников. Вероятно, их можно оправдать: они не заметили эту статью, потому что она была опубликована в физическом журнале и называлась «Квантовые отображения»!

4. Введение термина «хаотическая адвекция»

Теперь я подошел к тому моменту введения в гидромеханику идеи хаотической адвекции. (На диапозитиве, где представлена эта часть лекции, я поместил снимок Лапорта с Эрвином Шрёдингером, одним из основателей квантовой механики, и Харрисоном Рэндллом, очень энергичным человеком, который в то время был заведующим кафедрой физики Мичиганского университета.)

Многие читатели, наверное, принимали участие в программе Геофизической Гидродинамики в Институте океанографии Вудс-Хоула. Я участвовал в этой программе в 1980 году. В 1982 году

я выступил с докладом на симпозиуме по исследованию пассивных частиц в окружающей среде в рамках программы Геофизической Гидродинамики Вудс-Хоула. Судя по расписанию, я выступал во вторник, 27 июля, в 14.00. Мой доклад назывался «Идеализированная модель размешивания». Я представил результаты по «модели мигающего вихря», описанной ниже. Аннотация [2], опубликованная в трудах симпозиума, завершалась таким предложением: «В сущности, предлагается существование нового режима адвекции, промежуточного между турбулентной и ламинарной адвекцией, который можно назвать «хаотической адвекцией». Так что, насколько мне известно, это первый случай использования термина «хаотическая адвекция» в научной литературе.

Примерно неделю спустя, когда я представил аннотацию моего выступления на заседании Американского Физического Общества того года, термин «хаотическая адвекция» перебрался в название, и мой доклад на заседании Рутгерса был назван «Размешивание хаотической адвекцией». Как обычно, аннотация была опубликована в *Bulletin of the American Physical Society* [4].

Так же была озаглавлена и статья [5], впоследствии представленная для публикации в *Journal of Fluid Mechanics* 30 марта 1983 года. Я помню эту дату, потому что 20 апреля 1983 года, всего три недели спустя, Уэйн Артер подал статью по конвекции Релея — Бенара в журнал *Physics Letters*. В статье Артера [9] присутствует идея о хаотической адвекции. В некотором смысле эта статья аналогична исследованию Хенона [20], но в ней используется более реалистичный и более легко реализуемый поток. Артер писал: «Линии тока устойчивой конвекции Релея — Бенара в плоском квадрате демонстрируются с помощью отображений Пуанкаре. Когда более важной становится мода второго порядка, поток становится эргодическим от границ вовнутрь подобно возмущенной интегрируемой гамильтоновой системе». И: «Представляется, экспериментаторы, изучавшие конвекцию, сами того не осознавая, изучали возмущенную интегрируемую гамильтонову систему; например, существуют явные указания на переходное перемешивание скалярной примеси в развитом поле скорости».

Что же содержится в статье 1984 года, которая в списке литературы значится под номером 12? Во-первых, там присутствует формулировка общей идеи хаотической адвекции, которая вкратце приводится в §2 данной статьи. Затем вводится простая модель устройства, которое инженер-химик назвал бы «групповой мешалкой». Впоследствии эта модель получила название «модель мигающего вихря». В этой модели размешиваемая жидкость ограничивается круглым диском. Предполагается, что поток является несжимаемым, двумерным, невязким. Объекты, совершающие перемешивание, (мешалки) представлены связанными точечными вихрями, которые находятся под контролем исследователя в том смысле, что их можно «включить» и «выключить» (или передвинуть, хотя это направление в статье не рассматривается). Мешалка считается «включенной», когда соответствующая ей точка в области потока действует как точечный вихрь. Тогда поток в диске — это поток, созданный модулем этого точечного вихря при выполнении граничного условия скольжения на ограничивающем круге. Когда мешалка «выключается», считается, что поток жидкости останавливается немедленно. Теперь может «включиться» другая мешалка и т. д. Такая модель, очевидно, является, скорее, кинематической, нежели динамической.

Мотивацией для возникновения этой модели стала работа по взаимодействующим точечным вихрям, выполненная совместно с Нейлом Памфри и опубликованная несколькими годами ранее [7]. Я не могу вдаваться в детали в рамках данной статьи, но читатели, знакомые с этой литературой, быстро увидят связь. Два взаимодействующих точечных вихря в круге будут создавать хаотическую адвекцию, но связь с практическим размешиванием просматривалась слабо. Отсюда и модификация до управляемых мешалок.

Модель мигающего вихря анализировалась с помощью стандартных методов из теории динамических систем, в частности, численного построения сечений Пуанкаре для различных значений времени T , когда каждая точечная мешалка оставалась «включенной». Поскольку в этой задаче плоскость потока совпадает с фазовым пространством, как уже отмечалось, следуя (2.6), сечение Пуанкаре можно рассмотреть как порожденное стробоскопическим освещением точек адвекции с периодом стробоскопа, установленным на время переключения мешалок. Вычисленные с помощью численных методов сечения Пуанкаре ясно свидетельствуют о появлении в адвекции хаоса. При коротком времени переключения поток, который произвольная частица воспринимает на некотором расстоянии от мешалок, в грубом приближении, подобен установившемуся потоку. В самом деле, адвекция, вызванная поочередно пульсирующими мешалками, в пределе коротких импульсов, — это грубый алгоритм для интегрирования движения частицы в поле потока, созданном обеими мешалками, которые постоянно находятся во «включенном» состоянии! По мере увеличения времени переключения, в вычисленных сечениях Пуанкаре появляется все больше и больше хаоса.

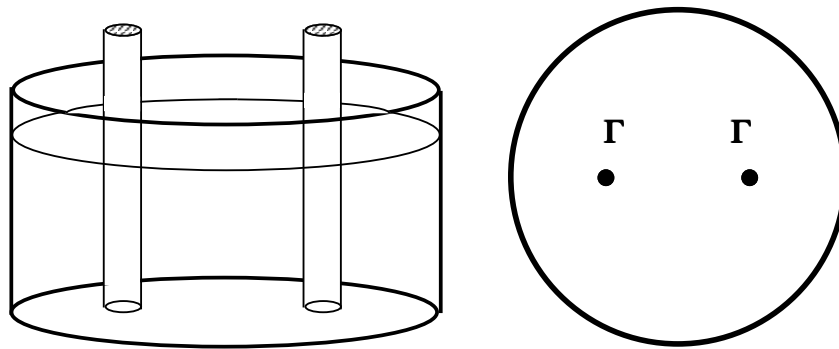


Рис. 3. «Групповое мешающее устройство» с двумя «мешалками» и его представление в «модели мигающего вихря» диском жидкости с двумя связанными переключаемыми точечными вихрями

Чтобы закрепить связь с процессом размешивания, создавались численные модели, в которых в капле из 10 000 точек совершалась пассивная адвекция потоком мигающего вихря. Вычисления показали, что дисперсия дискретных частиц за фиксированный промежуток времени была гораздо более сильной, когда время переключения, T , соответствовало хаотическому режиму, нежели когда оно соответствовало интегрируемому или почти интегрируемому режиму. Поскольку поток несжимаем, наблюдаемая дисперсия частиц служит признаком огромного растяжения материальных линий. Поскольку данная область ограничена, это постоянное растяжение означает многократное свертывание. В статье присутствовали и другие моменты, например, предварительное обсуждение итерированных отображений и симметрий в приложении к проблеме потока мигающего вихря. (Подробности см. в статье, обозначенной в списке литературы номером 12.)

Как была принята статья? Я могу передать смысл отзывов рецензентов, полученных через *Journal of Fluid Mechanics*. Первый рецензент написал: «...хорошо написанная статья, в которой приводится изумительно интересный пример хаотической адвекции. По-моему, эта статья будет очень полезным дополнением к существующей литературе». Очевидно, этот рецензент был прав. Статья действительно стала «очень полезным дополнением к существующей литературе».

Второй рецензент начал свой отзыв так: «Эта... очень лаконичная, но несколько раздражающая статья... вероятно, заслуживает публикации, хотя автор обзора имеет... замечания, касающиеся ее релевантности в отношении поведения «реальных» жидкостей (какими бы они ни были).

Идея интерпретации траекторий частиц как решений обыкновенного дифференциального уравнения... хороша, даже несмотря на всю свою очевидность (как и отмечает Ареф). Некоторые гидромеханики, плодотворно использовавшие эту аналогию, игнорировали последние достижения теории динамических систем и поэтому упустили большую часть ее преимуществ». Затем он сделал еще множество замечаний, которые можно без труда устранить путем внесения в текст косметических поправок.

Ученым, знакомым с теорией динамических систем, эта статья, должно быть, и правда представлялась «лаконичной, но несколько раздражающей». Подобные идеи ранее действительно развивали в отношении движения заряженных частиц в электромагнитных полях как для ускорителей частиц, так и для плазменных устройств. В тех случаях хаос был «плохим» явлением, которого следовало избегать. Отличие ситуации в гидромеханике в том, что здесь, возможно впервые, хаос — «хороший». Если вы хотите эффективно размешать жидкость, хаотическая адвекция нужна вам в полном объеме!

В конце своего отчета этот рецензент дал такое заключение: «... эта короткая статья заставила меня хорошенько поразмыслить и написать длинную рецензию. Она, безусловно, заслуживает публикации, после необходимой доработки».

Был еще и третий рецензент. Его заключение я воспроизвожу дословно: «Статья не произвела на меня никакого впечатления, поскольку, на мой взгляд, все важные моменты для общих сохраняющих меру отображений плоскости были освещены в блестящей диссертации МакКея, а частный случай потока, созданного движущимся вихрем, вряд ли заслуживает особого внимания или имеет важность для гидродинамики». К оценке этого рецензента время оказалось наиболее безжалостным.

Возможно, кому-то будет интересен следующий исторический факт: два из трех вышеназванных рецензентов между 1984 и 2000 годами получили Премию им. Лапорта.

К счастью, есть еще и редакторы, и статья все-таки была принята. На все вышесказанное редактор отреагировал, отметив, что «в целом, рецензии в общем носят благоприятный характер за исключением достаточно пристрастного заключения [третьего] рецензента...» и что «... можете считать, что ваша статья принята на предварительной основе, поскольку мне кажется, что вы сможете удовлетворить [второго] рецензента». Подготовка рукописи к печати заняла довольно продолжительное время, поскольку мне пришлось переделать все иллюстрации: тысячи мелких точек, изображающих переносимые адвекцией частицы и точки в сечениях Пуанкаре, были, явно, слишком малы, а оригинальные рисунки в издательстве «Cambridge University Press» воспроизвести не могли. В конце, концов, все было улажено, и статья появилась в качестве первой в 143 номере *Journal of Fluid Mechanics* в июне 1984 года.

Статья завоевала популярность; прижился и сам термин «хаотическая адвекция». (В 1987 году статья вновь появилась в книге *Hamiltonian Dynamical Systems* («Гамильтоновы динамические системы»), изданной под редакцией Р. С. МакКея и Дж. Д. Мейсса и опубликованной Адамом Хильгером.) На рисунке 4 приводятся результаты, полученные при использовании электронной версии Science Citation Index. Закрашенные столбики показывают количество цитирований статьи 1984 года как функцию календарного года. Я склонен доверять этим результатам, поскольку лично знаком с большинством статей. Заштрихованные столбики изображают число статей, в которых термин «хаотическая адвекция» используется в названии статьи или в аннотации к ней. Я нахожу тенденцию, в целом, правильной, но абсолютные числа кажутся несколько

заниженными. Некоторые авторы вместо термина хаотическая адвекция используют термин хаотическое перемешивание. Это, в принципе, нежелательно, если принимать во внимание очень полезную классификацию Экарта. Кроме того, раньше свои приверженцы были и у термина «лагранжева турбулентность», но вскоре его сочли неточным и неуместным. Такие терминологические вариации без труда объясняют, почему число цитат выдержек из статьи превышает число употреблений точного термина «хаотическая адвекция» в названии или аннотации.

В заключение, я думаю, можно сказать, что данная концепция и терминология сохраняются и впредь. Мне было очень интересно наблюдать, как с течением времени этот интеллектуальный продукт делает сначала свои первые шаги, а потом постепенно становится зрелым.

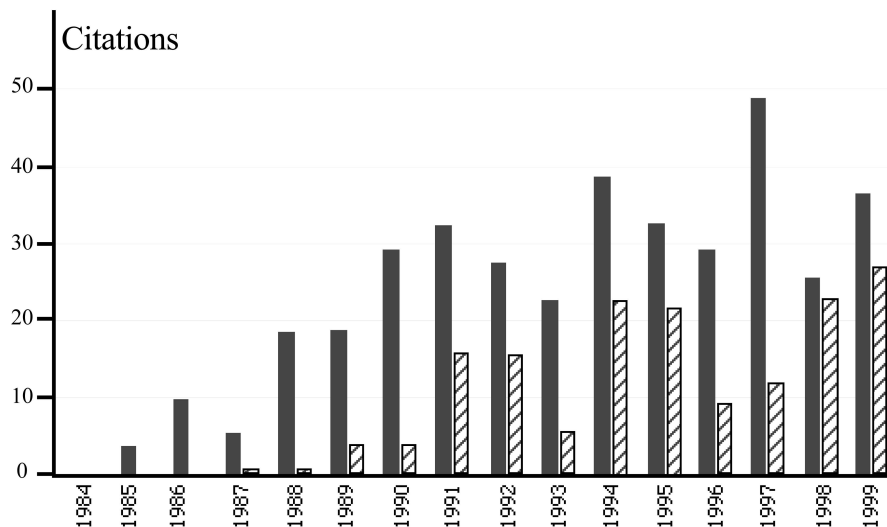


Рис. 4. Закрашенные столбики: число цитирований «*Journal of Fluid Mechanics*, 1984, V. 143, p. 1–23» как функция календарного года; заштрихованные столбики: число статей, в которых термин «хаотическая адвекция» используется в названии или аннотации как функция календарного года

5. Дальнейшие разработки

С самого начала было ясно, что экспериментально хаотическую адвекцию следует искать в вязких потоках: в сущности, идеально подходил поток Стокса, когда все поле потока, описывается движением его границ. Поэтому началась охота за такими потоками Стокса, которые имели бы достаточную сложность. Идеальным кандидатом был поток Стокса между вращающимися цилиндрами, один из которых располагался внутри другого несимметрично относительно центра. Мы с Балачандаром, а также группа ученых из Колумбийского университета, о работе которой мы ничего не знали, быстро подготовились к проведению численных модельных экспериментов с хаотической адвекцией в этом потоке.

Группа, работавшая в Колумбийском университете под руководством Рене Чеврея и Майкла Табора, а также аспирант Джоэл Чайкен, пошла дальше и провела эксперимент, о котором они сообщили в своей статье [14] от 1986 года в *Proceedings of the Royal Society*. Результаты были весьма удовлетворительны. Краска, введенная в поток, распределялась в нем самым

разнообразным путем, в зависимости от того, был это островок правильной формы или хаотическое море (читателям было бы полезно посмотреть иллюстрации, присутствующие в их статье). В пределах островков была получена структура в виде «рулета с железной прослойкой», чего следовало бы ожидать в случае с практически полностью интегрируемой адвекцией. Однако в хаотическом море краска полностью гомогенизировалась в том же временном масштабе, что наводило на мысль о том, что из-за быстрого межфазного растяжения происходила более сильная диффузия. Чайкен и др. вычислили сечения Пуанкаре для своего потока, что независимо сделали и мы с Балачандаром [6], и сумели полностью сопоставить вычисления с экспериментальными наблюдениями. В действительности, иногда вычисление предполагало наличие маленьких островков, которые пропустили при первом проведении эксперимента и которые впоследствии были обнаружены.

Таким образом, ссылка [14] стала первой экспериментальной проверкой хаотической адвекции в нестационарном двумерном вязком потоке в том смысле, что в данной работе было проведено детальное сравнение (для расширенного диапазона контрольных параметров потока) вычисленного сечения Пуанкаре с результатом визуализации соответствующего потока. В то первое время важно было знать каким образом аналитически можно исключить действие вторичных потоков или других физических механизмов как источников наблюдаемых сложных конфигураций. Кроме того, аналитическое выражение для потока позволяло, в сущности, идеальным образом управлять адвекцией частиц в компьютерных моделях с помощью численных методов.

В то же время эксперимент с кавитационным потоком с движущимися стенками, проведенный Чиеном, Райзингом и Оттино [15], в процессе визуализации потока указал на присутствие вложенного подковообразного отображения. Тогда этот поток не определялся аналитически, так что прямое сравнение эксперимента с численной моделью оказалось невозможным. Распознавание подковообразного отображения классифицировали как прямое топологическое проявление хаотической кинематики в потоке.

Затем последовали многочисленные эксперименты, в результате которых было получено множество очень симпатичных иллюстраций данного явления. Например, иллюстрация с обложки январского выпуска журнала *Scientific American* от 1989 года, которая появилась вместе со статьей Оттино, напечатанной в этом выпуске, вновь содержала сложные структуры, созданные в потоке Стокса между двумя несимметричными вращающимися цилиндрами краской с очень низким коэффициентом диффузии. Запутанность хаоса, обычно ограничивающаяся малопонятным фазовым пространством, здесь изображалась в реальном пространстве, благодаря уравнениям (2.6). Редакторы многих журналов, люди, связанные со смежными науками, и общественность сочли эти прекрасные изображения просто неотразимыми.

Невозможно так же подробно описать все разработки, которые проводились с этого момента, поскольку как только была установлена связь адвекции и хаоса в динамической системе, само собой возникло множество приложений, и к проблеме кинематики потока начали применять весь инструментарий теории динамических систем. Таким образом, я назову лишь несколько самых основных событий.

В 1989 году, всего через несколько лет после публикации первых исследовательских работ по этой теме, увидела свет книга Оттино [27] — отчасти монография, отчасти учебник. (Она была опубликована в серии книг по прикладной математике, которую незадолго до того основали мы с Дэвидом Дж. Крайтоном — лауреатом Премии им. Отто Лапорта 1998 года.) Эта книга сыграла важную роль в «распространении информации» о роли хаотической динамики в процессах перемешивания жидкости в различных научных и технических сообществах. Раздел по хаотической конвекции включен и в книгу Майкла Табора по нелинейной динамике [29], опубликованную в том же году.

На следующий год в Сан-Диего проводился симпозиум IUTAM на тему *Гидромеханика размешивания и перемешивания*. Главным обсуждавшимся вопросом была хаотическая адвекция. Труды [1] симпозиума вышли как специальный номер журнала *Physics of Fluids*.

Первой глобальной конференцией, в названии которой прозвучал термин «хаотическая адвекция», был, если мне не изменяет память, совместный симпозиум НАТО и Европейского геофизического общества на тему *Хаотическая адвекция, динамика трасеров и турбулентная дисперсия*, проводившийся в 1993 году в Италии. Труды [10] этого симпозиума опубликованы в специальном номере журнала *Physica D*.

В 2000 году, для оценки популярности данного предмета, совершенно естественным было ввести термин «хаотическая адвекция» в различные поисковые программы всемирной паутины. Именно это я и сделал в конце октября 2000 года. В зависимости от используемой поисковой программы, я получил примерно от 125 до более 100 000 «ссылок». Мне кажется, что эти цифры говорят о хаотической адвекции ровно столько же, сколько о масштабах и точности используемых поисковых систем!

Сегодня термин «хаотическая адвекция» является одним из ключевых слов, которые авторы статей этого журнала могут использовать для классификации своих работ.

6. Перспективы

Хаотическая адвекция повидала множество приложений в различных областях гидромеханики [3], и их список продолжает расти. Одними из самых важных, возможно, являются те, что обращаются к размешиванию жидкостей в геофизических или планетарных масштабах. Численные модели размешивания, вызванного конвекцией, происходящей в мантии Земли, выказывают все признаки хаотической адвекции (в смысле рис. 1), в смысле появления складок и слоев все меньших и меньших масштабов. Эту идею можно проследить до уровня наплывов, наблюдаемых в отдельных камнях. Перемешивание жидкости, обусловленное периодическими приливами и отливами на мелководье, напрашивается на интерпретацию через хаотическую адвекцию больше, чем через общепринятые модели турбулентного описания [32]. Наиболее интересное проявление хаотической адвекции было замечено в поведении потока под доминирующим воздействием азимутальной струи, которая встречает полярный вихрь, окружающий Антарктическую озонную дыру [11]. Таким образом, хаотическая адвекция, возможно, сыграет значительную роль в глобальном изменении климата.

В заключение, мне хотелось бы обозначить три последние разработки, которые, судя по всему, являются особенно многообещающими. Я выделил в инженерных науках две новые области применения: микро-жидкостные устройства и обработка материалов, — и то, что я считаю самым значительным успехом в теории за несколько лет — использование идей из топологии для «встраивания» хаотической адвекции в конструкцию мешалки.

Прежде всего, поговорим о микро-электромеханических системах, а в частности, об их применении в биогидродинамике, целью которой является реализация в микроканалах интегральной микросхемы некоторых тонких операций, которые обычно выполняются с помощью обычного крупного лабораторного оборудования. Поскольку мы говорим о движении жидкости в трубках, толщиной в человеческий волос, число Рейнольдса потока мало, обычно меньше 100 и часто порядка 1. Хотя размеры малы, время диффузии может быть долгим по сравнению с продолжительностью обработки устройства, так что существует необходимость своего рода размешивания. Более того, поскольку жидкостная среда представлена биологическими жидкостями разных типов, желательно ограничить общую нагрузку на встроенную макромолекулу. Хаотическая

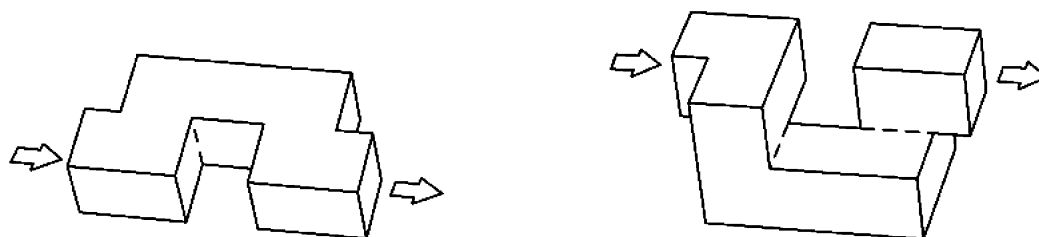


Рис. 5. Геометрия «базовой ячейки», используемой в микро-электромеханических устройствах, которые производит компания «Иллинойз групп». Слева: двумерный «квадратно-волновой» миксер. Справа: трехмерный «змеевидный» миксер. (Перепечатано из [25] с разрешения Elsevier Science)

адвекция является заманчивым инженерным решением для достижения размешивания, эффективного в данном контексте.

Первая мешалка для биологических жидкостей, основанная на хаотической адвекции, построенной Эвансом, Липманном и Пизано [19], была смоделирована на потоке пульсирующих источников—стоков, который мы со Скоттом Джонсом изучили десятью годами раньше [21]. В этом устройстве, к несчастью, было несколько движущихся частей, представлявших проблемы для производства и надежности его действия.

Более многообещающими являются статические миксеры. В устройствах, производимых «Иллинойз групп» [25] (см. рис. 5), в качестве проводника используется поток по закрученным трубам, который изучали Джонс, Томас и я [22]. Продвижение потока вдоль трубы теперь играет ту же роль, что и время в моделях неустановившихся двумерных потоков. При малых, но конечных значениях числа Рейнольдса, которые рассматриваются в данном примере, в плоскости поперечного сечения создается область вторичного потока. В «змеевидной» геометрии изгиб от одного сегмента к другому поворачивает вторичный поток от сегмента к сегменту. Для частицы, передвигающейся с потоком вниз по трубе, структура потока в поперечном направлении периодически изменяет ориентацию. Правда, не все частицы ощущают изменение ориентации одновременно, поскольку движутся по трубе с разной скоростью. Тем не менее, чередующийся рисунок вторичного потока имеет ожидаемый и желаемый эффект.

Теперь на месте сечений Пуанкаре с помощью освещения стробоскопом, использовавшегося в двумерном нестационарном потоке, мы строим сечения, вычисляя отображения частиц от одной плоскости поперечного сечения трубки на следующую, расположенную в геометрически подобном месте по длине трубки. Это, безусловно, приближение, поскольку при конечном значении числа Рейнольдса в общем случае будет существовать влияние потока в сегменте n на поток в сегменте $(n + 1)$, однако это вычисление все равно полезно для общего направления проектирования и изготовления устройства.

В приложении к микро-электромеханическим системам мы построили и сравнили два прототипа (рис. 5): плоский «квадратно-волновой» канал с четырнадцатью сегментами и трехмерный «змеевидный» канал с одиннадцатью сегментами. Вычисления показывают [25], что в квадратно-волновом устройстве сечение Пуанкаре остается достаточно регулярным (рис. 6). Если в этом вычисленном потоке проследить частицы, то окажется, что они прецессируют относительно определенных жидких трубок. В змеевидном канале, напротив, вычисления демонстрируют в этом сечении смесь регулярных островков с хаотическими областями. Траектории частиц могут ограничиваться островками, но могут также и неравномерно перемещаться через все сечение (рис. 7). Эта феноменология аналогична той, которая наблюдается в исследовании потока по

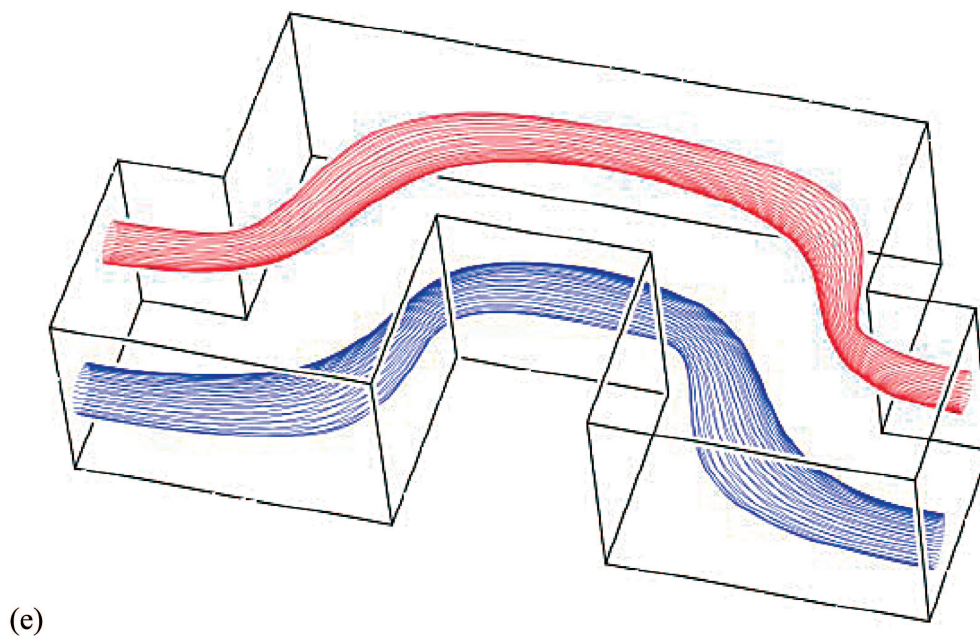
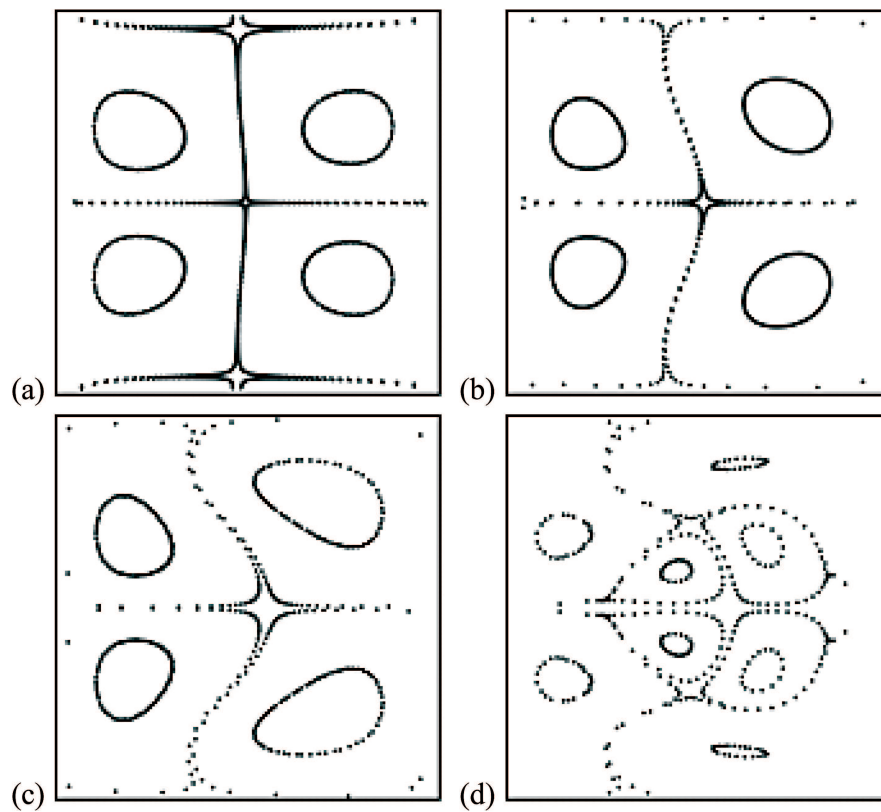


Рис. 6. Сечения Пуанкаре при (a) $Re=10$; (b) 20; (c) 30 и (d) 50 для «квадратно-волнового» миксера. (e) Примеры трубок регулярного потока, наблюдаемых при отслеживании отдельных частиц. (Перепечатано из [25] с разрешения Elsevier Science)

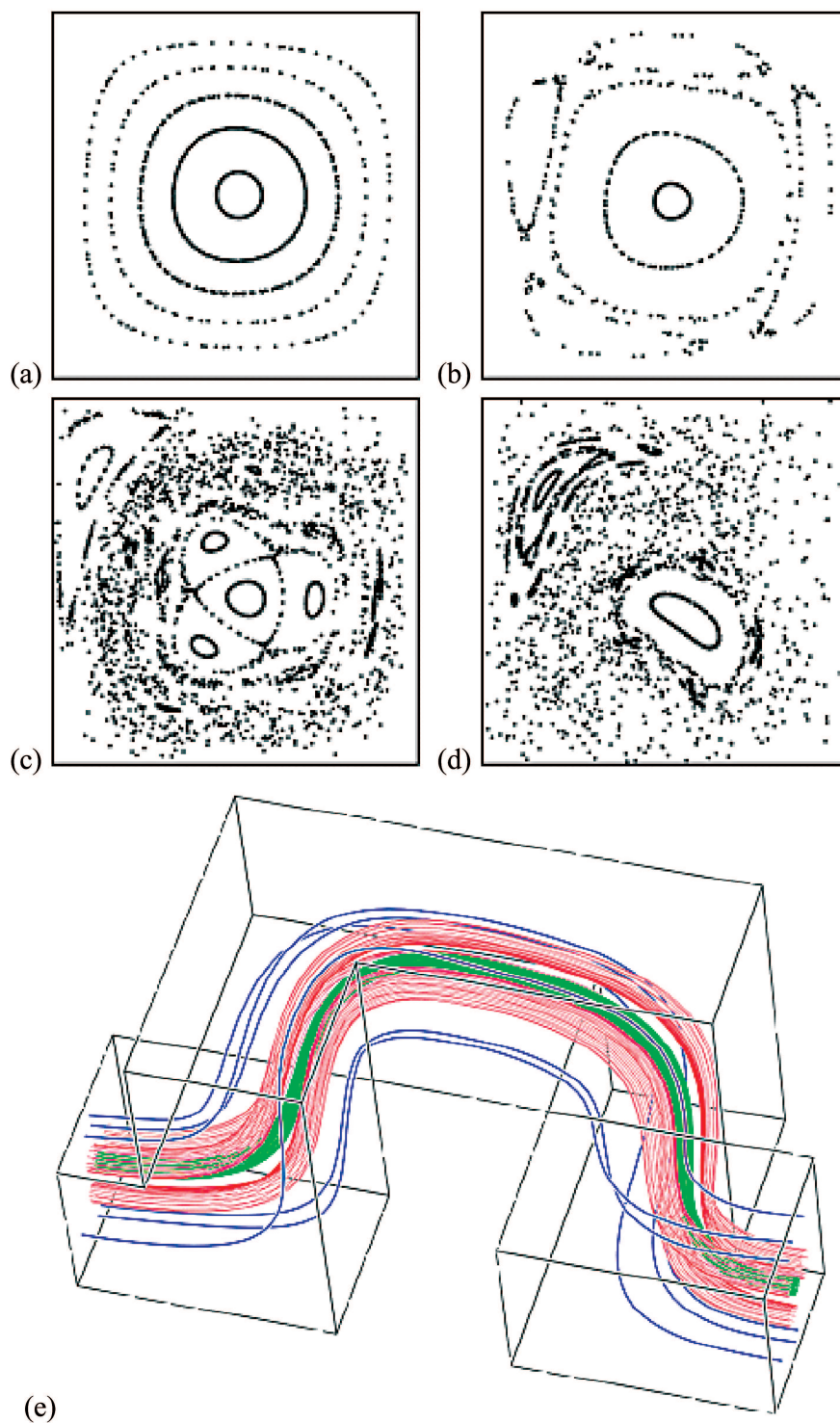


Рис. 7. Сечения Пуанкаре при (a) $Re=1$; (b) 5; (c) 10 и (d) 20 для «змеевидного» миксера. (e) Примеры трубок регулярного потока и хаотических траекторий, наблюдаемых при отслеживании отдельных частиц. (Перепечатано из [25] с разрешения Elsevier Science)

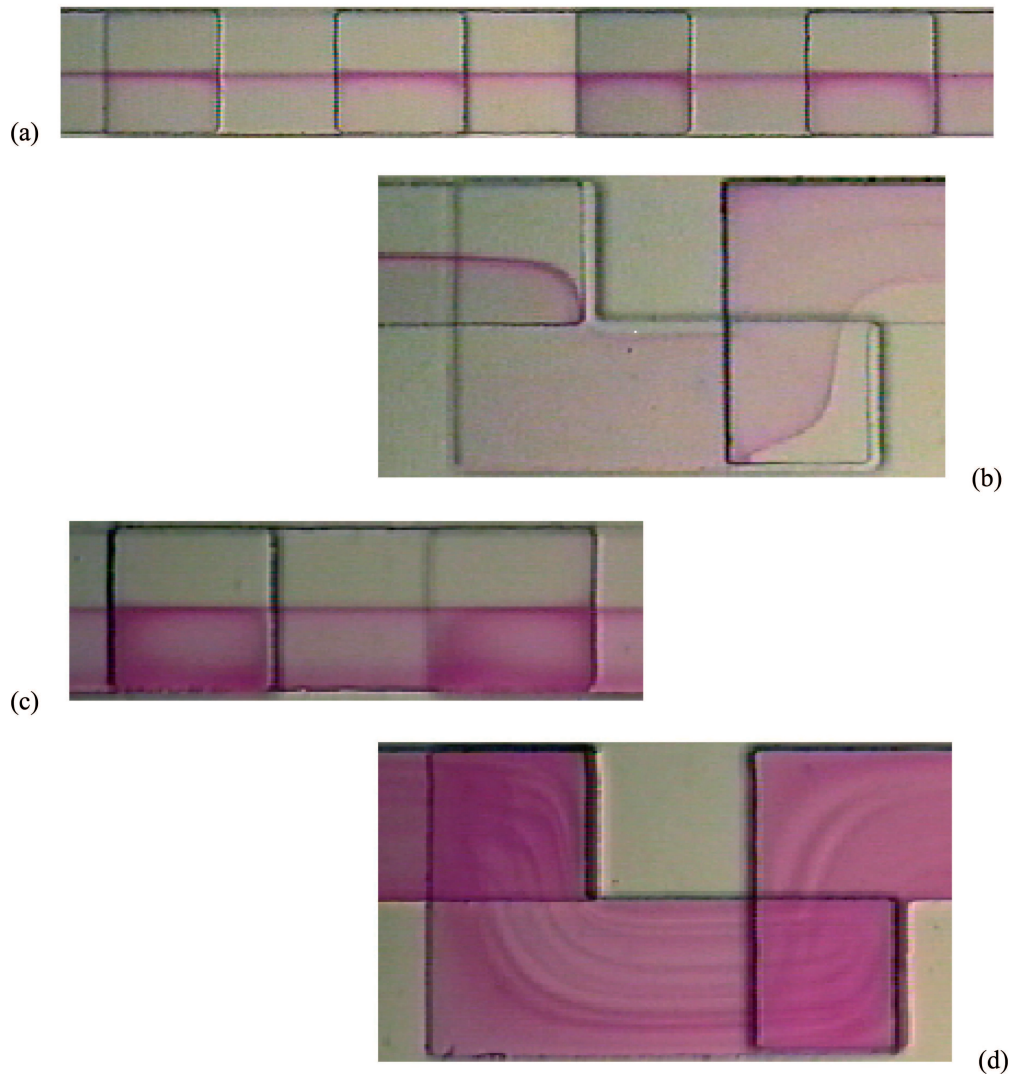


Рис. 8. Визуализация потока перемешивания жидкостей в микро-электромеханических устройствах. Маркированная жидкость появляется в результате кислотно-щелочной реакции между жидкостью, которая входит в канал над средней линией и под ней. (а) Поток в двумерном «квадратно-волновом» миксере: вид первых двух сегментов в профиль при $Re \approx 10$; (б) Сравнение картины первого сегмента трехмерного «змеевидного» миксера при $Re \approx 10$; (в) Результаты для «квадратной волны» в сегменте 14; (д) Результаты сравнения для «змеевидного» миксера в сегменте 11. (Перепечатано из ссылки 27 с разрешения Elsevier Science)

закрученной трубе [22]. Хаос в направлении, перпендикулярном потоку, в грубом приближении аналогичен диффузии в направлении, перпендикулярном потоку, поэтому движение частиц вдоль трубы имеет те же особенности, что и сдвиговая дисперсия, которую Дж. И. Тейлор рассмотрел в своей плодотворной статье по перемешиванию жидкости [30].

Когда выполнены визуализации потока с использованием кислотно-щелочной реакции, и поток рассматривается в профиль, результаты впечатляют (рис. 8). В квадратно-волновом канале мы видим, что почти половина поперечного сечения остается чистой даже после нескольких

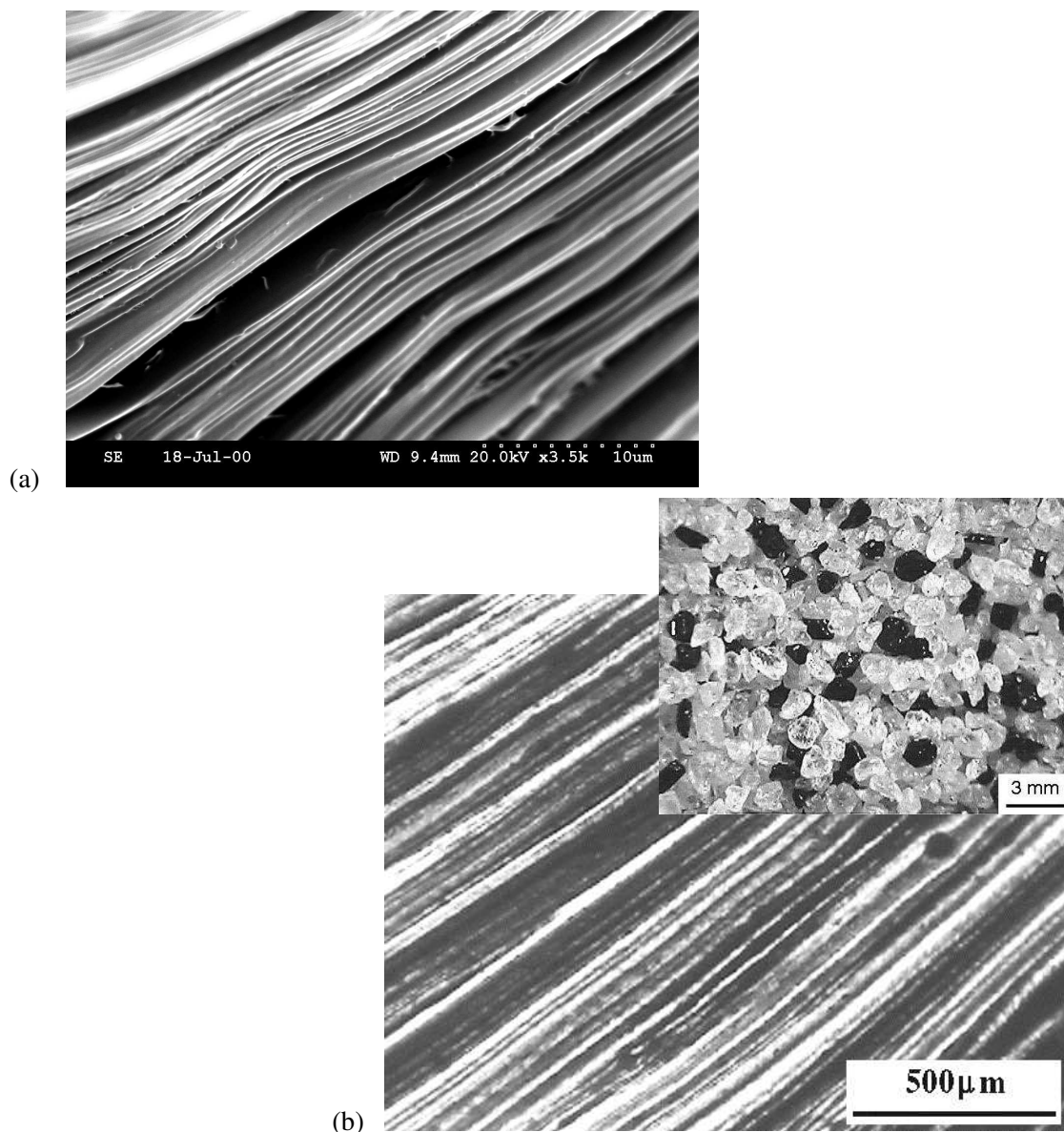


Рис. 9. Обработка материалов с помощью хаотической адвекции. (а) Многослойные пленки, образованные в экструдированной нити толщиной 2,5 мм, состоящей из двух термопластов (перепечатано из [34] с разрешения Elsevier Science). (б) Тонкие параллельные бороздки, образованные среди черных частиц угля в полистироле (перепечатано из [17] с разрешения Sage Publications, Ltd.)

изгибов. В змеевидном канале, напротив, окрашенный продукт, в конце концов, заполняет все поперечное сечение, указывая на гораздо более высокую степень перемешивания.

Следующая область применения, о которой мне хотелось бы упомянуть, — это обработка материалов. Масштабы, которые стали доступны благодаря хаотической адвекции, варьируются от размера контейнера до таких величин, при которых континуум-гипотеза, на которой основываются уравнения адвекции, нарушается или прерывается физическими эффектами, оставшимися за пределами нашего описания, как, например, силы ван дер Ваальса. Этим следстви-

ям хаотической адвекции нашли применение Дэвид Цумбрюннен и его группа в Клемсонском университете. Они занимаются контролируемым образованием форм в расплавах [33], включая многослойные пленки, которые в наше время производятся, главным образом, коэкструзией через краски. С помощью коэкструзии производят пленки, имеющие менее десяти слоев. Группа Цумбрюннена впрыскивает компоненты полимера и добавки в область обработки, где происходит хаотическая адвекция. Эти компоненты вытягиваются и рекурсивно сгибаются потоком, образуя листы и многослойные пленки [34] (рис. 9а). Добавки, состоящие из макрочастиц, также можно объединить во множество волокончатых цепочек, чтобы пластмассам и стеклу можно было придать свойство электропроводности при сокращенных порогах просачивания [17]. Чтобы добиться однородности состава, авторы начали со случайной смеси обычных полистироловых шариков и полистироловых шариков, содержащих черные частицы угля. Исходная грубая смесь до расплава и получившийся после хаотической адвекции композитный материал изображены на рисунке 9b. Бороздки придают данному композиту свойство электропроводности. При использовании традиционных методов электропроводность можно получить лишь случайно в произвольных местах и при более высоких концентрациях добавок, так что хаотическая адвекция — это принципиально иной и, судя по всему, более совершенный способ создания электропроводящих композитных материалов.

Два вышеприведенных примера содержат, главным образом, фазу «размешивания» (если использовать классификацию Эккарта). Впоследствии, межфазное напряжение, силы сдвига между компонентами и молекулярные силы (если внутренние масштабы длины становятся достаточно малы) — фаза «перемешивания» — приводят к различным морфологическим изменениям. Может даже произойти ориентация на молекулярные масштабы, если компоненты ограничиваются малыми областями, простирающимися лишь в наномасштабах. Развитием формы можно управлять путем выбора параметров хаотической адвекции, создавая эффект *натурального* процессора. При более, чем $O(10)$ слоев пленки, получающихся при традиционной коэкструзии, Цумбрюннен и его группа создают многослойные пленки, состоящие из сотен или тысяч слоев. В некоторых случаях получается толщина слоя менее 100 нанометров. Это желательный результат, поскольку такие пленки менее подвержены расслоению, которое является общей проблемой, и могут представлять собой более надежные барьеры для диффундирующих смесей. Когда при продолжительном размешивании пленки рвутся, в крупных композиционных диапазонах наблюдались новые волокнистые [33] и взаимопроникающие структуры [23] (рис. 10). Такие структуры позволяют получить более прочные пленки, благодаря взаимосвязанности слоев, и могут даже привести к созданию новых электропроводящих материалов.

И наконец, с вашего позволения, мне хотелось бы сказать несколько слов о приложении идей из топологии к вопросу хаотической адвекции. При изучении потока Стокса используются конфигурации, в которых один или два цилиндра вращаются на месте, чтобы размешать жидкость. Конечно, в повседневной жизни размешивание производится не так. Когда вы размешиваете свой кофе, вы обычно не опускаете ложку и не вращаете ее на одном месте! Вы, скорее, перемещаете ее по кругу или по восьмерке.

Если рассмотреть такой вид размешивания, то возникают интересные топологические соображения. В случае с одной или даже двумя мешалками все относительно просто. Но в случае с тремя мешалками есть два, в сущности, различных способа их движения, причем один из них, с точки зрения топологии, тривиален, а другой имеет глубокий смысл. Маленькие девочки, которым заплетают косички, хорошо поймут различие между ними.

Чтобы сделать эту работу, будет справедливо вновь обратиться к нашей статье, обозначенной в списке литературы [11]. Данное приложение тесно связано с прекрасным разделом современной математики («современной» с позиций стандартов гидромеханики!), разработанным

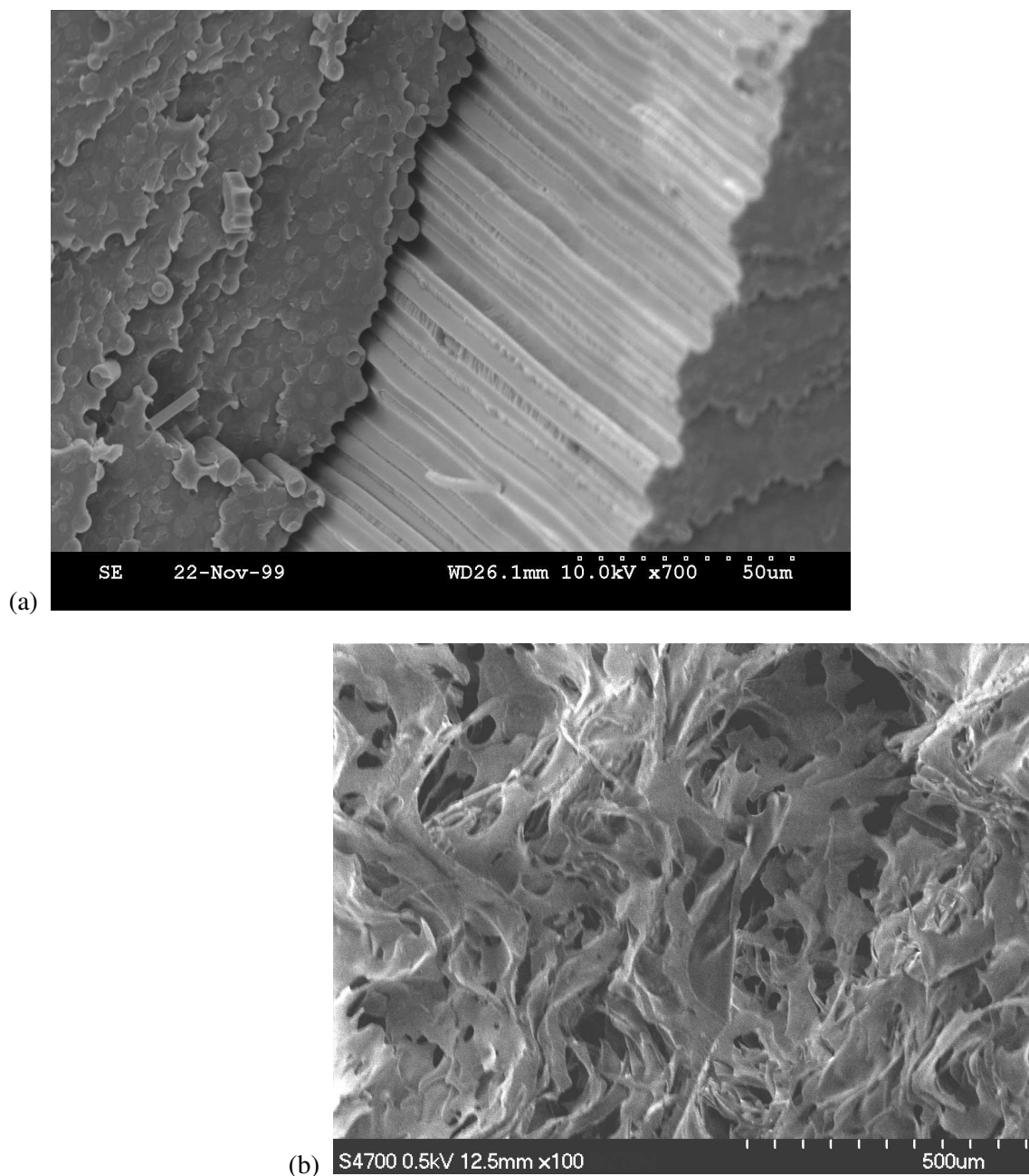


Рис. 10. Волокнистые и взаимопроникающие структуры, созданные разрывом пленки при обработке материала с использованием хаотической адвекции. (а) Поверхность излома невытянутого волокна с волокнистой микроструктурой, состоящей на 45 процентов объема из полипропилена и полистирола (из [33] с разрешения Текстильного института.) (б) Микроснимок (выполненный на сканирующем электронном микроскопе) взаимопроникающих полиэтиленовых структур низкой плотности, полученных при одновременном образовании отверстий в процессе хаотической адвекции, происходившей в пленках, образованных в полиэтиленовых и полистироловых компонентах (из [23] с разрешения John Wiley & Sons.)

Терстоном и основанным датским математиком Джакобом Нильсеном. В этой работе приводится классификация природы отображения диска, подверженной различным правилам размешивания. Это топологическая теория, поэтому она задействует только идею непрерывности движения жидкости. Данная теория применяется вне зависимости от лежащей в ее основе динамики.

Простой эксперимент показывает [13] результаты двух последовательностей с использованием трех мешалок и наводит на мысль о глубоких различиях этих результатов в зависимости от топологии движения мешалки. Надеемся, что мы, в сущности, нашли способ «встроить» хаотическую адвекцию в масштаб движения мешалки без необходимости настройки параметров после свершившегося факта. Применение теории Терстона — Нильсена к вопросу хаотической адвекции является, на мой взгляд, очень важным и интересным достижением и в свое время может возыметь важные следствия для технологии.

Хотелось бы думать, что подобная связь между проникновением в глубинные разделы математики и приложением в физическом мире также порадовала бы Отто Лапорта. Правило сохранения четности Лапорта, безусловно, связано с топологическим свойством закрученности. Просматривая список его публикаций [16], я обнаружил, что Лапорт опубликовал статью, которая называлась «Волчок Ковалевской в квантовой механике», и статью по эллипсам Кеплера. Значит, его несомненно заинтересовал бы вопрос интегрируемости в сравнении с хаосом и природы орбит частиц.

Таков мой рассказ о развитии хаотической адвекции — идеи, имевшей важных предшественников, благодаря некоторым очень глубоким мыслителям науки. Очень практическая проблема гидромеханики обогатилась фундаментальными идеями из физики и математики, и через это обогащение она теперь стимулирует развитие нашей технологии от микро-электромеханических систем до обработки материалов. Создаются промышленные устройства, использующие хаотическую адвекцию, и выдаются патенты, реализующие этот механизм. В этом взаимодействии «рационального» с «практическим», говоря словами Ньютона, и заключается весь смысл нашей науки. В наше время хаотическая адвекция применяется в масштабах от планетарных атмосфер (масштабы порядка 1 000 км, или 10^6 м) до обработки материалов — слоев толщиной в 100 нм (10^{-7} м), т. е. охватывает более дюжины порядков величин. Временные масштабы находятся в диапазоне от секунд (для лабораторных экспериментов) до геологических временных масштабов (например, размешивание мантии Земли). При этом не существует причин, по которым один из этих диапазонов или даже оба не могли бы в будущем стать еще обширнее.

Благодарности

Я очень обязан Филипу Баксбауму за то, что он прислал мне рисунки и биографические сведения по Отто Лапорту, а также Эдварду Шпигелю за то, что он поделился своими воспоминаниями об Отто Лапорте во времена его профессорства в Мичиганском университете. Я благодарю Марка Стремлера за то, что он собрал рисунки 5–8, а также команду, названную в ссылке 27, за сотрудничество, приведшее к этим результатам. Дэвид Цумбрюннен предоставил рисунки 9–10 и помог описать работу его группы в разделе 6. Мне хотелось бы выразить свою благодарность Скотту Джонсу за самое плодотворное сотрудничество.

Мою раннюю работу по хаотической адвекции поддержали гранты NSF CTS84–51107/PYI и DoE FG03–85ER13349. Подготовка этой лекции и этой рукописи проводилась при поддержке гранта DARPA/ AFRL F33615–98–1–2853.

Список литературы

- [1] Acrivos A., Aref H., Ottino J. M. (eds.). *Symposium on Fluid Mechanics of Stirring and Mixing* // Phys. Fluids A, 1991, V. 3, № 5, Part 2, p. 1009–1469.
- [2] Aref H. *An idealized model of stirring*. Woods Hole Oceanographic Institution // Tech. Rep., 1982, WHOI-82-45, p. 188–189.
- [3] Aref H. (ed.) *Chaos Applied to Fluid Mixing Chaos, Solitons & Fractals*, 1994, V. 4, № 6 (Special issue), p. 745–1116. Также опубликована отдельным томом: Pergamon Press, 1995, 370 p.
- [4] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // Bull. Amer. Phys. Soc., 1982, V. 27, p. 1178.
- [5] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // J. Fluid Mech., 1984, V. 143, p. 1–21.
- [6] Aref H., Balachandar S. *Chaotic advection in a Stokes flow* // Phys. Fluids, 1986, V. 29, p. 3515–3521.
- [7] Aref H., Pomphrey N. *Integrable and chaotic motions of four vortices* // Phys. Lett. A, 1980, V. 78, p. 297–300.
- [8] Arnold V. I. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits* // C. R. Acad. Sci. Paris A, 1965, V. 261, p. 17–20.
- [9] Arter W. *Ergodic stream-lines in steady convection* // Phys. Lett., 1983, V. 97A, p. 171–174.
- [10] Babiano A., Provenzale A., Vulpiani A. (ed.) *Chaotic Advection, Tracer Dynamics and Turbulent Dispersion* // Physica D, 1994, V. 76, p. 1–328.
- [11] Behringer R. P., Meyers S. D., Swinney H. L. *Chaos and mixing in a geostrophic flow* // Phys. Fluids A, 1991, V. 3, p. 1243–1249.
- [12] Berry M. V., Balazs N. L., Tabor M., Voros A. *Quantum maps* // Ann. Phys., 1979, V. 122, p. 26–63.
- [13] Boyland P. L., Aref H., Stremler M. A. *Topological fluid mechanics of stirring* // J. Fluid Mech., 2000, V. 403, p. 277–304.
- [14] Chaiken J., Chevray R., Tabor M., Tan Q. M. *1986 Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow* // Proc. R. Soc. Lond. A, 1986, V. 408, p. 165–174.
- [15] Chien W. -L., Rising H., Ottino J. M. *Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows* // J. Fluid Mech., 1986, V. 170, p. 355–377.
- [16] Crane H. R., Dennison D. M. *Otto Laporte. July 23, 1902 – March 28, 1971* // Biograph. Mem. Nat. Acad. Sci., 1979, V. 50, № 8, p. 269–285.
- [17] Danescu R. I., Zumbrunnen D. A. *Creation of conducting networks among particles in polymer melts by chaotic mixing* // Journal of Thermoplastic Composite Materials, 1998, V. 11, p. 299–320.
- [18] Eckart C. *An analysis of the stirring and mixing processes in incompressible fluids* // J. Mar. Res., 1948, V. 7, p. 265–275.
- [19] Evans J., Liepmann D., Pisano A. P. *Planar, laminar mixer* // Proc. MEMS'97, 1997, Nagoya, Japan, p. 96–101.
- [20] Hénon M. *Sur la topologie des lignes courant dans un cas particulier* // C. R. Acad. Sci. Paris A, 1966, V. 262, p. 312–314.
- [21] Jones S. W., Aref H. *Chaotic advection in pulsed source-sink systems* // Phys. Fluids, 1988, V. 31, p. 469–485.
- [22] Jones S. W., Thomas O. M., Aref H. *Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe* // J. Fluid Mech., 1989, V. 209, p. 335–357.
- [23] Kwon O., Zumbrunnen D. A. *Progressive morphology development to produce multilayer films and interpenetrating blends by chaotic mixing* // J. Appl. Polymer Sci., 2001, V. 82, p. 1569–1579.

- [24] Laporte O. *The structure of the iron spectrum. Part I* // Z. Phys., 1924, V. 23, p. 135–175.
- [25] Liu R. H., Sharp K. V., Olsen M. G., Stremmer M. A., Santiago J. G., Adrian R. J., Aref H., Beebe D. J. *A Passive three-dimensional «C-shape» helical micromixer* // Journal of Microelectro-mechanical Systems, 2000, V. 9, p. 190–197.
- Beebe D. J., Adrian R. J., Olsen M. G., Stremmer M. A., Aref H., Jo B. H. *Passive mixing in microchannels: Fabrication and flow experiments* // Mécanique & Industries, 2001, V. 2, p. 343–348.
- [26] Lorenz E. N. *Deterministic nonperiodic flow* // J. Atmos. Sci., 1963, V. 20, p. 130–141.
- [27] Ottino J. M. *The Kinematics of Mixing* // Cambridge University Press, 1989.
- [28] Prandtl L., Tietjens O. G. *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics* // Dover Publications, 1957.
- [29] Tabot M. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* // John Wiley and Sons, 1989.
- [30] Taylor G. I. *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube* // Proc. R. Soc. Lond. A, 1953, V. 219, p. 186–203.
- [31] Welander P. *Studies of the general development of motion in a two-dimensional, ideal fluid* // Tellus, 1955, V. 7, p. 141–156.
- [32] Zimmerman J. T. F. *The tidal whirlpool: A review of horizontal dispersion by tidal and residual currents* // Netherlands J. Sea Res., 1986, V. 20, p. 133–154.
- [33] Zumbrunnen D. A. *Smart blending: A means to obtain fibers and plastic products with tailored properties* // The Journal of The Textile Institute, 2000, V. 91, p. 92–104.
- [34] Zumbrunnen D. A., Inamdar S. *Novel sub-micron highly multi-layered polymer films formed by continuous flow chaotic mixing* // Chem. Eng. Sci., 2001, V. 56, p. 3893–3897.